

Физико-математический хоккей

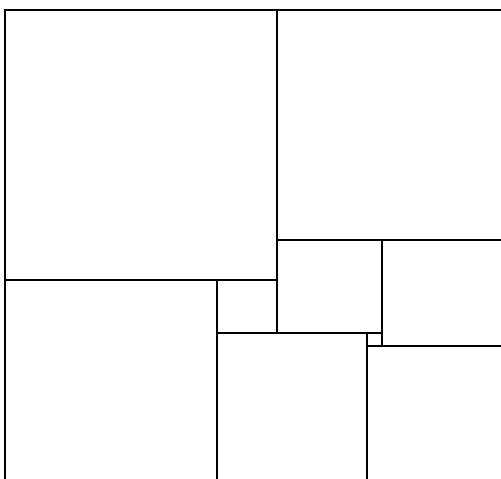
Задание по математике

1. Из пункта **A** в пункт **B** вышел пешеход. Одновременно с ним из **B** в **A** по той же дороге выехал велосипедист. И пешеход, и велосипедист двигались равномерно. В момент встречи пешеходу оставалось идти до **B** 1,5 часа, а велосипедисту оставалось ехать до **A** 40 минут. Через какое время после начала движения они встретились?

2. Докажите, что для любого действительного x верно неравенство

$$3(1 + x^2 + x^4) \geq (1 + x + x^2)^2$$

3. Прямоугольник разрезан на несколько квадратов так, как показано на рисунке. Найдите стороны прямоугольника, если известно, что сторона самого маленького квадрата равна единице.



4. Внутри равностороннего треугольника **ABC** взята произвольная точка **M**. Из нее опущены перпендикуляры **MK**, **MH** и **MP** на стороны **AB**, **AC** и **BC** соответственно. Докажите, что
- а) $AH^2 + CP^2 + BK^2 = CH^2 + BP^2 + AK^2$;
б) $AH + CP + BK = CH + BP + AK$.

5. Найдите все такие действительные a , при которых система

$$ax^2 + x + 1 = 0$$

$$x^2 + ax + 1 = 0$$

имеет хотя бы одно решение.

6. С натуральным числом проделали следующую операцию: отбросили последнюю цифру, получив некоторое новое число, а затем сложили это полученное число с отброшенной цифрой, умноженной на 5. Оказалось, что полученный результат делится нацело на 7. Докажите, что и исходное число делилось нацело на 7.
7. В шахматном турнире принимали участие пять спортсменов, причем каждый играл с каждым ровно по одному разу. В результате все шахматисты набрали разное количество очков; игрок, занявший первое место, ни разу не сыграл вничью; занявший второе место ни разу не проиграл; а занявший четвертое место ни разу не выиграл. Восстановите по этим данным результаты всех партий.
8. Можно ли так расставить по кругу числа $1, 2, \dots, 13$, чтобы для любых трех подряд идущих чисел a, b, c выражение $b^2 - ac$ делилось нацело на 13?