



Група Б

1. П'ятизначні числа  $a$  та  $b$  мають таку властивість: якщо до числа  $b$  приписати зліва число  $a$ , то отримане десятизначне число ділиться на  $ab$ . Знайдіть усі такі числа.

2. На клітчастій дошці  $8 \times 8$  розташовано  $n$  трьохклітинкових „куточків” таким чином, що додати ще один „куточок” неможливо („куточки” орієнтовано за лініями сітки, ніякі два з них не можуть накладатися). Знайдіть найменше можливе значення  $n$ .

3. На острів, населений двома племенами, прибув новий губернатор. Губернатору відомо, що тубільці одного з племен завжди кажуть правду, а тубільці іншого племені завжди брешуть. Самі тубільці знають кожен про кожного, хто з якого племені. Губернатор також хоче це встановити. Для цього він має право один раз на день обирати серед населення острова довільну групу (можливо, і всіх жителів), та запитувати у кожного члена цієї групи кількість „лжеців” у цій групі. Чи зможе губернатор за два дні довідатись про кожного жителя острова, з якого він племені? Чи завжди він зможе зробити це за один день?

4. У трикутнику  $ABC$  точки  $O$  та  $I$  – центри описаного і вписаного кола відповідно; точка  $M$  – середина тієї дуги  $AC$  описаного кола, яка не містить вершину  $B$ . Доведіть, що

$MI = MO$  тоді і тільки тоді, коли  $\angle ABC = 60^\circ$ .

5. Розв'яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases} x^{10} + x^2 = 32y^5 + 2y; \\ x^3 + xy^2 = y^6 + y^4. \end{cases}$$

6. Знайдіть усі  $n \geq 3$ , для яких з чисел  $1; 2; \dots; n$  можна вибрати два числа, добуток яких вдвічі більший за суму решти чисел.

7. У трикутнику  $ABC$   $\angle A = 50^\circ$ ;  $\angle C = 70^\circ$ . Точки  $D$  і  $E$  відмічено на сторонах  $AB$  та  $BC$  відповідно.  $\angle BCD = 40^\circ$ ;  $\angle CAE = 30^\circ$ .  $M$  – точка перетину  $AE$  і  $CD$ . Знайдіть градусну міру кутів  $ABM$  та  $CDE$ .

8. Знайдіть усі натуральні числа, які не можна подати у вигляді  $m + 2n(m - 1)$ ,  $m \in \mathbb{N}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

9. Розв'яжіть систему нерівностей для кожного значення параметра  $k$ :

$$\begin{cases} x^2 - (4k + 1)x + 4k^2 + 2k - 2 \leq 0; \\ x^2 + (3k + 1)x + 2k^2 + k \leq 0. \end{cases}$$

10. Алфавіт однієї іноземної мови складається з  $n$  літер ( $n \geq 2$ ). Послідовність літер вважається словом тоді і тільки тоді, коли в ній між будь-якими двома однаковими літерами не знайдуться дві (або більше) однакових літери. Яка найбільша можлива довжина слова у цій мові? Скільки всього слів такої довжини є у мові?