

Управління освіти і науки  
Одеської обласної державної адміністрації  
Рішельєвський ліцей  
VII ОБЛАСНА ЛІТНЯ ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНА ШКОЛА  
ОЛІМПІАДА З МАТЕМАТИКИ



Завдання №№ 1–5 призначені для учнів, які закінчили 8 клас.  
Завдання №№ 4–8 призначені для учнів, які закінчили 9 клас.  
Завдання №№ 7–11 призначені для учнів, які закінчили 10 клас.

1. Побудуйте графік функції

$$y = \frac{4}{1-x} - \left( \frac{2x+2}{3-x} \right)^2 \left( \frac{x+9}{x^2+2x+1} + \frac{2x}{1-x^2} \right).$$

2. Розв'яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases} xy + xz = 5; \\ yx + yz = 10; \\ zx + zy = 13. \end{cases}$$

3. На сторонах  $BC$  та  $CD$  паралелограма  $ABCD$  зовні його побудовані рівносторонні трикутники  $BCM$  та  $CDN$ . Доведіть, що трикутник  $AMN$  також рівносторонній.

4. а) Чи можна розставити числа 1; 2; ...; 8 по колу таким чином, щоб кожне число ділилося на модуль різниці своїх сусідів?

б) Те саме питання для чисел 1; 2; ...; 9.

5. На клітчастій дошці  $9 \times 9$  зафарбували деякі 19 клітинок. Доведіть, що при цьому або знайдуться дві зафарбовані клітини, які мають спільну сторону, або знайдеться така незафарбована клітинка, яка має спільні сторони принаймні з двома зафарбованими клітинками.

6. Знайдіть усі прості числа  $p$ , для яких числа  $p^2 - 2$ ;  $2p^2 - 1$ ;  $3p^2 + 4$  також є простими.

7. Розв'яжіть нерівність

$$\frac{\sqrt{1+x^3} + x - 2}{x-1} \geq x+1.$$

8. У трикутнику  $ABC$  проведено бісектрису  $AL$ , медіану  $BM$  та висоту  $CN$ . Знайдіть площу трикутника, обмеженого прямими

а)  $AC$ ;  $AL$ ;  $CN$ ,

б)  $AL$ ;  $BM$ ;  $CN$ ,

якщо  $AB = BC = 2\sqrt{5}$ ;  $AC = \sqrt{5}$ .

9. Рівняння  $x^3 + ax^2 + bx + 8 = 0$  має три попарно різних дійсних корені  $x_1, x_2, x_3$ . Відомо, що числа  $x_1, x_2, x_3$  у вказаному порядку утворюють арифметичну прогресію, а числа  $x_2, x_1, x_3$  у вказаному порядку утворюють геометричну прогресію. Визначте  $a$  та  $b$ .

10. Доведіть, що для довільних натуральних чисел  $k$  та  $n$  число  $(k+1)^{2n+1} + k^{n+2}$  ділиться без остачі на  $k^2 + k + 1$ .

11. Парламент деякої незалежної республіки складається з 6 депутатів. При парламенті працює дев'ять парламентських комісій. Кожна комісія складається з 3 депутатів парламенту. Доведіть, що парламентарії можуть розділитися на дві фракції таким чином, щоб у кожній комісії були представники обох фракцій.

На виконання роботи відводиться 4 години.  
Кожна задача оцінюється в 7 балів.  
Використання калькуляторів не дозволяється.