

ДВИЖЕНИЕ ТЕЛА ПОД ДЕЙСТВИЕМ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

Приложение к компьютерной моделирующей программе FALL

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Постановка задачи

Требуется решить *основную задачу механики* для тела, движущегося в поле земного тяготения. Изменением силы тяжести с высотой пренебречь.

Предварительный анализ

На летящее в земной атмосфере тело действуют две силы - сила тяжести $m\vec{g}$ и сила сопротивления воздуха $\vec{F}_{\text{сопр}}$.

Уравнение движения тела, выражающее второй закон Ньютона, имеет вид:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_{\text{сопр}} \quad (1)$$

Рассмотрим вначале простейший случай.

Движение без учета сопротивления воздуха

Поскольку сопротивление воздуха не учитывается, полагаем $\vec{F}_{\text{сопр}} = \vec{0}$. Тогда из уравнения (1) получаем:

$$\vec{a} = \vec{g} \quad (2),$$

т.е. движение тела является *равноускоренным*, а ускорение тела не зависит от массы и равняется *ускорению свободного падения*. Этот факт, полученный нами теоретически, был экспериментально установлен еще в конце 16 века *Галилео Галилеем*.

Для решения основной задачи механики необходимо выбрать *систему отсчета* и задать *начальные условия*.

Пусть в выбранной системе отсчета тело брошено из некоторой точки с координатами x_0, y_0 с начальной скоростью \vec{v}_0 под углом α к горизонту. Тогда начальные условия при $t = 0$ имеют вид:

$$x = x_0, y = y_0 \quad (3),$$

$$v_{0x} = v_0 \cos \alpha \quad (4),$$

$$v_{0y} = v_0 \sin \alpha \quad (5).$$

Поскольку ускорение тела \vec{g} перпендикулярно оси X, то проекция вектора \vec{g} на эту ось равна нулю, т.е. вдоль оси X тело движется без ускорения:

$$a_x = 0.$$

Это означает, что проекция скорости v_x со временем остается неизменной, мы имеем дело с *равномерным* движением вдоль оси X:

$$v_x = v_{0x} \quad (6).$$

Поскольку вектор \vec{g} направлен против оси Y, то его проекция на эту ось равна $-g$. С таким ускорением тело движется вдоль оси Y:

$$a_y = -g.$$

Мы видим, что ускорение тела вдоль оси Y постоянно, поэтому в соответствии с формулой для скорости при *равноускоренном* движении

$$v_y = v_{0y} - gt \quad (7).$$

Подставляя выражение (4) в формулу (6), а выражение (5) в формулу (7), получаем:

$$\begin{cases} v_x = v_0 \cos \alpha & (8) \\ v_y = v_0 \sin \alpha - gt & (9) \end{cases}$$

Пользуясь формулой для пути при равномерном движении и формулой для пути при равноускоренном движении, запишем выражения для координат тела:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + v_{0x}t \\ y &= y_0 + v_{0y}t + \frac{a_y t^2}{2} \end{aligned}$$

Отсюда с помощью (4) и (5) получаем:

$$\begin{cases} x = x_0 + v_0 \cos \alpha \cdot t & (10) \\ y = y_0 + v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2} & (11) \end{cases}$$

Выражения (10) и (11) являются решением основной задачи механики для произвольных начальных условий. Проанализируем это решение для важнейших частных случаев.

Свободное падение тела из состояния покоя

Пусть тело падает с высоты h из состояния покоя. Тогда начальные условия имеют вид

$$x_0 = 0, y_0 = h, v_0 = 0.$$

Из (11) имеем:

$$y = h - \frac{gt^2}{2}. \quad (12)$$

Время падения с высоты h находим из условия $y = 0$ и получаем:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}. \quad (13)$$

Подставим t в формулу (9) и определим скорость тела в момент касания Земли:

$$v = -v_y = gt = \sqrt{2gh}. \quad (14)$$

Движение тела, брошенного вертикально вверх

Считаем, что при $t = 0$ тело находится в начале координат. Тогда

$$x_0 = 0, y_0 = 0, \alpha = 90^\circ.$$

В высшей точке подъема тело на мгновение останавливается, прежде чем начать движение вниз. В этот момент $v_y = 0$, и из уравнения (9) легко найти время достижения максимальной высоты:

$$t = \frac{v_0}{g}. \quad (15)$$

Подставим (15) в (9) и после преобразований получим высоту подъема тела:

$$h = \frac{v_0^2}{2g}. \quad (16)$$

Движение тела, брошенного горизонтально

Пусть тело бросают с высоты h со скоростью v_0 в направлении оси X . Тогда полагаем $x_0 = 0, y_0 = h, \alpha = 0$.

При горизонтальном броске начальное значение v_{0y} равняется нулю, как и при свободном падении из состояния покоя. Движение вдоль оси X происходит одновременно с движением вдоль оси Y и независимо от него. Поэтому нетрудно понять, что время достижения телом поверхности Земли по-прежнему

определяется формулой (13). Координата x точки падения получается подстановкой (13) в формулу (10):

$$x = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}. \quad (17)$$

Движение тела, брошенного под углом α к горизонту

Пусть тело бросают из точки $x_0 = 0, y_0 = 0$. Сначала найдем время достижения максимальной высоты, положив в (9) $v_y = 0$:

$$t = v_0^2 \frac{\sin \alpha}{g}. \quad (18)$$

Подставив это время в (11), получим максимальную высоту подъема тела:

$$h = v_0^2 \frac{\sin^2 \alpha}{2g}. \quad (19)$$

Падение тела произойдет за время $2t$. Подстановка удвоенного значения t из (18) в формулу (10) дает выражение для дальности полета l :

$$l = v_0^2 \frac{\sin 2\alpha}{g}. \quad (20)$$

Чтобы получить уравнение траектории тела $y = y(x)$, необходимо исключить время из уравнений (10) и (11). Это приводит к выражению:

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) \frac{gx^2}{2v_0^2}. \quad (21)$$

Оно описывает семейство параболических траекторий, зависящее от двух параметров - начальной скорости v_0 и угла α .

Уравнение (21) позволяет, в частности, определять параметры стрельбы для попадания в цель, находящуюся на заданной высоте и удалении.

В качестве примера рассмотрим задачу о стрельбе из ружья, пренебрегая сопротивлением воздуха. Необходимо попасть в цель, находящуюся на расстоянии S по горизонтали и на высоте h над горизонтальной плоскостью. Будем считать скорость пули v_0 известной величиной. Под каким углом α к горизонту следует направить ствол ружья?

Чтобы ответить на этот вопрос, потребуем, чтобы траектория пули проходила через точку с координатами $x = S, y = h$.

На основании (21) записываем:

$$h = S \operatorname{tg} \alpha - (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) \frac{gS^2}{2v_0^2}$$

Это квадратное уравнение, где неизвестным является $\operatorname{tg} \alpha$. Если дискриминант

$$v_0^4 - g(gS^2 + 2v_0^2 h)$$

положителен, то уравнение имеет два вещественных корня, т.е. в цель можно попасть по двум различным траекториям (настильной и навесной). Если дискриминант отрицателен, то при данном значении v_0 в цель нельзя попасть ни при каком значении α . Ясно, что равенство нулю дискриминанта определяет минимальную начальную скорость, при которой еще можно попасть в цель:

$$v_{\min}^2 = g \left(h + \sqrt{h^2 + S^2} \right)$$

Учет силы сопротивления воздуха

Пусть движущееся тело имеет симметричную форму, так что направление силы сопротивления противоположно направлению вектора скорости. Данное условие выполняется, например, для шара, но не выполняется для тела в форме крыла.

Установлено, что с хорошей степенью точности величина силы пропорциональна квадрату скорости тела:

$$F_{\text{сопр}} = kv^2, \quad (22)$$

где коэффициент k определяется формой и размерами тела и свойствами среды, в которой оно движется.

Перепишем уравнение движения (1) для проекций векторов на координатные оси:

$$\begin{cases} ma_x = mg_x + F_{\text{сопр},x} \\ ma_y = mg_y + F_{\text{сопр},y} \end{cases} \quad (23)$$

Учтем, что

$$\begin{aligned} g_x &= 0, \quad g_y = -g, \\ F_{\text{сопр},x} &= -F_{\text{сопр}} \cos \alpha = -kv^2 \cos \alpha \\ F_{\text{сопр},y} &= -F_{\text{сопр}} \sin \alpha = -kv^2 \sin \alpha \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} v \cos \alpha &= v_x, \quad v \sin \alpha = v_y, \\ v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2}. \end{aligned}$$

Учитывая эти соотношения, из уравнений (23) получаем:

$$\begin{cases} a_x = -K_{\text{сопр}} v_x \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \\ a_y = -g - K_{\text{сопр}} v_y \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \end{cases} \quad (24)$$

Здесь введено обозначение

$$K_{\text{сопр}} = k/m \quad (25)$$

Решение системы уравнений движения (24) весьма сложно, однако некоторые важные выводы можно сделать сразу.

1. Прежде всего отметим, что величина $K_{\text{сопр}}$ обратно пропорциональна массе тела. Поэтому на движении легкого тела сила сопротивления будет сказываться сильнее, чем на движении тяжелого тела тех же размеров и формы.

2. Из-за того, что сила сопротивления возрастает с увеличением скорости, рано или поздно эта сила уравновесит силу тяжести. При этом скорость тела установится постоянной. Найти *установившуюся скорость* можно, полагая в (24) $a_x = a_y = 0$.

$$v_{\text{уст}} = \sqrt{\frac{g}{K_{\text{сопр}}}} \quad (26)$$

Нетрудно догадаться, что влиянием силы сопротивления можно пренебречь, когда выполняется условие:

$$v \ll v_{\text{сопр}} \quad (27)$$

3. В системе (24) в уравнение для a_x наряду с v_x входит величина v_y , и, точно так же, величина a_y зависит от v_x . Следовательно, вертикальная составляющая движения зависит от горизонтальной составляющей и наоборот. Это приводит к целому ряду необычных результатов. Например, тело, падающее вертикально без начальной скорости, достигнет земли раньше (!!!), чем то же тело, брошенное с той же высоты горизонтально.

Движение тела при наличии ветра

Говорить о влиянии ветра имеет смысл только тогда, когда учитывается наличие силы сопротивления воздуха.

Пусть ветер дует в направлении оси X , и его скорость равна V . Это означает, что вся воздушная масса перемещается в пространстве с указанной скоростью. Сила сопротивления определяется скоростью тела относительно воздуха, поэтому при вычислении $F_{\text{сопр}}$ имеет смысл временно перейти в движущуюся систему отсчета, связанную с воздухом.

Уравнения движения тела при наличии ветра имеют вид:

$$\begin{cases} a_x = -K_{\text{сопр}}(v_x - V)\sqrt{(v_x - V)^2 + v_y^2} \\ a_y = -g - K_{\text{сопр}}v_y\sqrt{(v_x - V)^2 + v_y^2} \end{cases}$$

Попытайтесь записать их самостоятельно.

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1-й уровень сложности

Если это специально не оговорено, наличие силы сопротивления воздуха не учитывайте.

1.1

Что называется свободным падением тела?

1.2

Можно ли считать свободным падением движение тела, брошенного под углом к горизонту, если можно пренебречь сопротивлением воздуха? А если сопротивлением пренебречь нельзя?

1.3

С каким ускорением движется свободно падающее тело? Тело, брошенное вертикально вверх?

1.4

По какой траектории движется тело, брошенное горизонтально?

1.5

По какой траектории движется тело, брошенное под углом к горизонту?

1.6

Как в ходе движения изменяется потенциальная, кинетическая и полная энергия тела, брошенного под углом к горизонту?

2-й уровень сложности

Если это специально не оговорено, наличие силы сопротивления воздуха не учитывайте.

2.1

Чем отличается ускорение, сообщаемое телам силой тяжести, от ускорений, которые сообщают им другие силы?

2.2

Почему ускорение, сообщаемое телу силой тяжести, не зависит от его массы?

2.3

Если бы тело падало на Землю с высоты в несколько тысяч километров, было бы его движение равноускоренным? Зависело бы в этом случае ускорение от массы тела (влиянием воздуха атмосферы на движение тела пренебречь)?

2.4

Каким должен быть угол бросания тела, чтобы дальность его полета была максимальной? Будет ли этот угол тем же, если тело брошено из точки, находящейся на некоторой высоте над Землей?

2.5

Каким должен быть угол бросания тела, чтобы высота его подъема над Землей была максимальна?

2.6

Каким должен быть угол бросания тела, чтобы время его полета было максимально?

2.7

Два тела одновременно начинают двигаться с высоты h . Одно из них начинает падать вертикально из состояния покоя, а другое бросают горизонтально. Какое из тел первым упадет на Землю?

3-й уровень сложности

При ответе учитывайте наличие силы сопротивления воздуха.

3.1

Чем определяются величина и направление силы, действующей на тело со стороны окружающего его воздуха?

3.2

Теннисный мяч и чугунное ядро одновременно начинают движение с одной высоты из состояния покоя. Какое из тел имеет большее ускорение в начальный момент времени? В момент касания Земли? Какое из тел первым достигнет Земли?

3.3

Теннисный мяч и чугунное ядро одновременно бросают вертикально вверх с одинаковой начальной скоростью. У какого из тел ускорение имеет большую

величину в начальный момент времени? В момент достижения наибольшей высоты? В момент падения на Землю? Какое из тел первым достигнет наибольшей высоты? Какое из тел первым упадет на Землю?

3.4

Вам необходимо забросить тело как можно дальше. Какой угол бросания следует для этого выбирать: равный 45 градусам, больше 45 градусов, меньше 45 градусов?

3.5

Два одинаковых тела одновременно начинают двигаться с высоты h . Одно из них падает вертикально из состояния покоя, а другое бросают горизонтально. Какое из тел первым упадет на Землю?

3.6

Тело бросают под некоторым углом к горизонту. В каком случае оно достигнет большей высоты: при встречном ветре, при попутном ветре или в безветренную погоду?

3.7

Какими были бы Ваши ответы на два предыдущих вопроса, если бы сила сопротивления была пропорциональна не квадрату, а первой степени скорости?

ОПИСАНИЕ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ

Здесь приведено описание только одной лабораторной работы из 18. Описание остальных работ содержится в теле в информационном разделе самой программы FALL.

Прежде всего необходимо отметить, что во всех случаях компьютер не выполняет за учащегося никакой работы по обработке и оформлению экспериментальных данных. Все расчеты, построение таблиц и графиков учащийся должен выполнить самостоятельно. Роль компьютера - заменить реальное экспериментальное оборудование компьютерной моделью.

Работа 3.3

Определение оптимального угла бросания тела при наличии сопротивления воздуха.

Установите начальные координаты тела $x_0 = y_0 = 0$, начальную скорость $v_0 = 30$ м/с. Из справочной таблицы возьмите значение $K_{\text{сопр}}$ для волейбольного мяча.

Запустите моделирующую программу для следующих значений угла бросания α :

$25^\circ, 27^\circ, 29^\circ, \dots, 51^\circ,$

в каждом случае определяя дальность полета тела l . Значения α и l занесите в заранее подготовленную таблицу.

Постройте график зависимости $l(\alpha)$. Из графика определите оптимальный угол бросания $\alpha_{\text{опт}}$, при котором дальность полета тела оказывается максимальной.

Повторите исследование для новых значений

$$v_0 = 60 \text{ м/с}, 80 \text{ м/с}, 120 \text{ м/с}.$$

Постройте график зависимости $\alpha_{\text{опт}}(v_0)$. Попробуйте, не прибегая к расчетам, объяснить поведение кривой.

Какой характер, по Вашему мнению, имела бы зависимость $\alpha_{\text{опт}}(v_0)$ для теннисного мяча, футбольного мяча (нарисуйте примерный вид графика)?

Приложение

СПРАВОЧНАЯ ТАБЛИЦА

Значения коэффициентов k , $K_{\text{сопр}}$ и установившейся скорости $v_{\text{уст}}$ для движения различных тел сферической формы в воздухе

Тело	масса кг	k кг/м	$K_{\text{сопр}}$ 1/м	$v_{\text{уст}}$ м/с
мяч для пинг-понга	$2.5 \cdot 10^{-3}$	$2.5 \cdot 10^{-4}$	0.100	9.9
теннисный мяч	0.06	$6.6 \cdot 10^{-4}$	0.011	29.9
волейбольный мяч	0.25	$6 \cdot 10^{-3}$	0.024	20.2
футбольный мяч	0.4	$1.6 \cdot 10^{-2}$	0.040	15.7
ядро спортивное	7.3	$7 \cdot 10^{-3}$	0.001	100