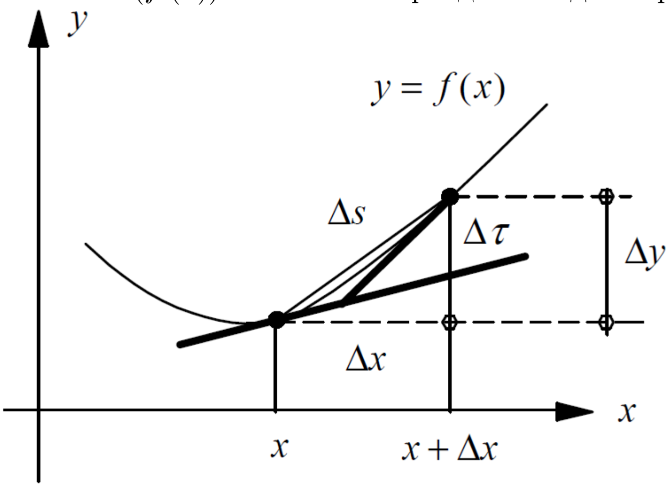
1 Кривизна кривой

Пусть кривая дана как график функции $y = f(x)$.
Двигаясь вдоль кривой, в каждой точке скорость движения направлена по касательной. Касательная прямая зависит от рассматриваемой точки. При движении точки вдоль кривой (вдоль графика функции) касательная будет поворачиваться.
Кривизну кривой определим как скорость поворота касательной при движении вдоль кривой. Иными словами это скорость изменения угла наклона касательной. Угол наклона касательной в точке x, или точнее в точке кривой с координатами $(x, f(x))$ это $\arctan(f'(x))$. Расстояние пройденное вдоль кривой обозначим $s = s(x)$.



Рассмотрим две близкие точки на кривой с абсциссами x и $x + \Delta x$ и касательные к графику функции в этих двух точках.
Обозначим изменение угла наклона касательной через $\Delta\tau$. Скорость изменения угла наклона касательной

$$k = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\tau}{\Delta s} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta\tau}{\Delta x}}{\frac{\Delta s}{\Delta x}} = \frac{\tau'(x)}{s'(x)}$$

$$s'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} = \sqrt{1 + (f'(x))^2} = \sqrt{1 + y'^2}$$

$$\tau'(x) = (\arctan(f'(x))' = \frac{f''(x)}{1 + (f'(x))^2} = \frac{y''}{1 + y'^2}$$

Подставляя последние два равенства в предидущее, получим

$$k = \frac{\tau'(x)}{s'(x)} = \frac{\frac{y''}{1+y'^2}}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{y''}{\sqrt{(1 + y'^2)^3}}$$

2 Параметрическое задание кривой

Хорошо известный способ определения кривой в виде графика функции $y = f(x)$ удобен, но иногда имеет недостатки. Например, окружность невозможно описать в виде $y = f(x)$ (Это можно сделать с помощью двух таких формул. Каких?)
Мы рассмотрим иной способ описания кривых на плоскости – параметрический. Начнем с примера:
Рассмотрим на координатной плоскости геометрическое место точек с координатами (x, y) удовлетворяющих следующим уравнениям:

$$\begin{cases} x = t, \\ y = 3t + 1; \end{cases}$$

где t пробегает значения от $-\infty$ до ∞.
Покажем, что это прямая: исключая t из последних двух уравнений, получим $y = 3x + 1$, где x пробегает значения от $-\infty$ до ∞. Это пример описания прямой с помощью параметра t.
Рассмотри более общую запись геометрического места точек с координатами (x, y)

$$\begin{cases} x = f(t), \\ y = g(t); \end{cases} \quad t \in [a, b],$$

где f и g данные функции. Такая запись называется параметрическим описанием кривой на плоскости, при этом переменная t называется параметром. Иногда t может иметь физическое значение, например время, температура, пройденное расстояние вдоль кривой. В последнем случае параметр t называется естественным параметром.
Рассмотрим еще один пример, положив $f(t) = r\cos t$ и $g(t) = r\sin t$, где t принимает значения от $-\infty$ до ∞. Подставив несколько различных значений

$$t = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \pi, \ldots$$

в формулы для вычисления координат (x, y), можно заметить, что получаемые точки для этих значений параметра лежат на окружности радиуса r. Более того из этих формул следует, что для произвольных значений t выполняется

$$x^2 + y^2 = r^2\cos^2 t + r^2\sin^2 t = r^2,$$

то есть геометрическое место точек является окружностью радиуса r.

3 Упражнения

- Вычислить кривизну окружности радиуса R. (Для этого рассмотреть отдельно верхний и нижний полукруг.)
- Найти координаты точки на графике функции $y = e^x$, в которой кривизна графика максимальна (Экстремум).
- Нарисовать кривую данную в виде параметризации

$$\begin{cases} x = t\cos t, \\ y = t\sin t; \end{cases} \quad t \in [0, 4\pi],$$

  Что получится, если отрезок для параметра t сдвинуть: $t \in [-2\pi, 2\pi]$?

4 Вычисление кривизны кривой заданной параметрически

Для вычисления кривизны кривой заданной параметрически в виде

$$\begin{cases} x = f(t), \\ y = g(t); \end{cases} \quad t \in [a, b],$$

рассмотрим точку (x, y) на кривой и допустим, что в окрестности этой точки из последних двух уравнений можно исключить переменную t и найти зависимость $y = y(x)$. В этом случае мы можем применить формулу

$$k = \frac{y''}{\sqrt{(1 + y'^2)^3}}.$$

Выразим производные $y'(x)$ и $y''(x)$ через извесные функции $x = f(t)$ и $y = g(t)$. При этом производную по переменной x будем обозначать $y'(x) = \frac{d\,y}{dx}$, а производную по t обозначим

$$\dot{y} = \frac{d\,y}{dt}, \qquad \dot{x} = \frac{d\,x}{dt}.$$

Получим (инженерный способ):

$$y'(x) = \frac{d\,y}{dx} = \frac{\frac{d\,y}{dt}}{\frac{d\,x}{dt}} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$$

Математически корректный вывод этот этой формулы сделаем по правилу дифференцирования сложной функции $y = y(x) = y(x(t))$:

$$\dot{y}(t) := \frac{d\,y(x(t))}{dt} = \frac{d\,y}{dx} \cdot \frac{d\,x}{dt} = y'(x) \cdot \dot{x}(t) \qquad \Rightarrow \qquad \dot{y} = y'\,\dot{x}$$

Аналогично можно вывести формулу для вычисления второй произвадной y''. Инженерный способ:

$$y''(x) = \frac{d^2\,y}{dx^2} = \frac{d(\frac{d\,y}{dx})}{dx} = \frac{d(\frac{\dot{y}}{\dot{x}})}{dx} = \frac{\frac{d(\frac{\dot{y}}{\dot{x}})}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^2}}{\dot{x}} = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3} \qquad \Rightarrow \qquad y''(x) = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3}$$

Упражнение: Вывести эту формулу с помощью правила дифференцирования сложной функции.

Теперь мы можем подставить выведенные выражения в формулу для вычисления криыизны и получим

$$k = k(t) = \frac{\frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3}}{\sqrt{\left(1 + \frac{\dot{y}^2}{\dot{x}^2}\right)^3}} = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{\sqrt{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^3}}$$

Упражнение: Вачислить кривизну окружности радиуса R заданной параметрически

$$\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t; \end{cases} \quad t \in \mathbb{R},$$

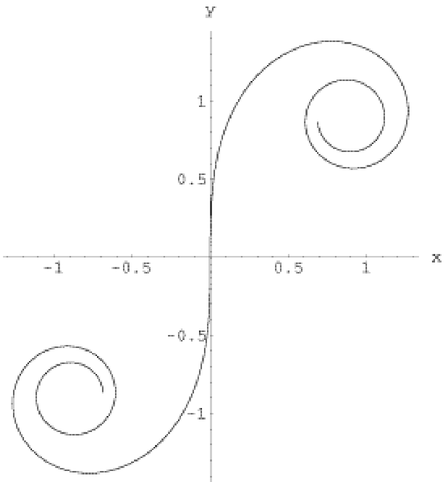
Упражнение: Вачислить кривизну кривой заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = \cos t^2, \\ y = \sin t^2; \end{cases} \quad t \in \mathbb{R},$$

5 Клотоида

Кривая опрелеённая с помощью параметризации

$$\begin{cases} x = \int \cos t^2 \, dt, \\ y = \int \sin t^2 \, dt; \end{cases} \quad t \in \mathbb{R},$$



называется клотоидой. Вичислим её кривизну:

$$\dot{x}(t) = \cos t^2, \qquad \ddot{x}(t) = -2t \sin t^2$$

$$\dot{y}(t) = \sin t^2, \qquad \ddot{y}(t) = 2t \cos t^2$$

$$k = k(t) = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{\sqrt{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^3}} = \frac{2t \cos^2 t^2 + 2t \sin^2 t^2}{(\cos^2 t^2 + \sin^2 t^2)^{\frac{3}{2}}} = 2t$$

То есть кривизна возрастает по линейному закону, в отличие от окружности. Склеивая две такие кривы можно получить кривую такую, чтона её концах кривизна равна нулю, а от одного конца к другому кривизна фозрастает линейно до некоторого максимального значения, затем падала к нулю.